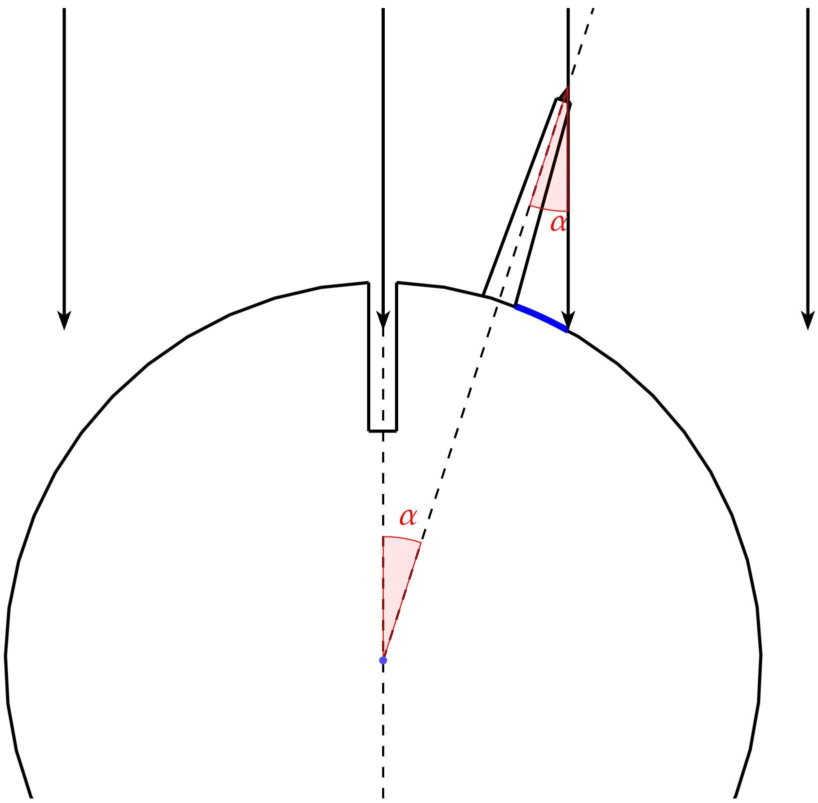
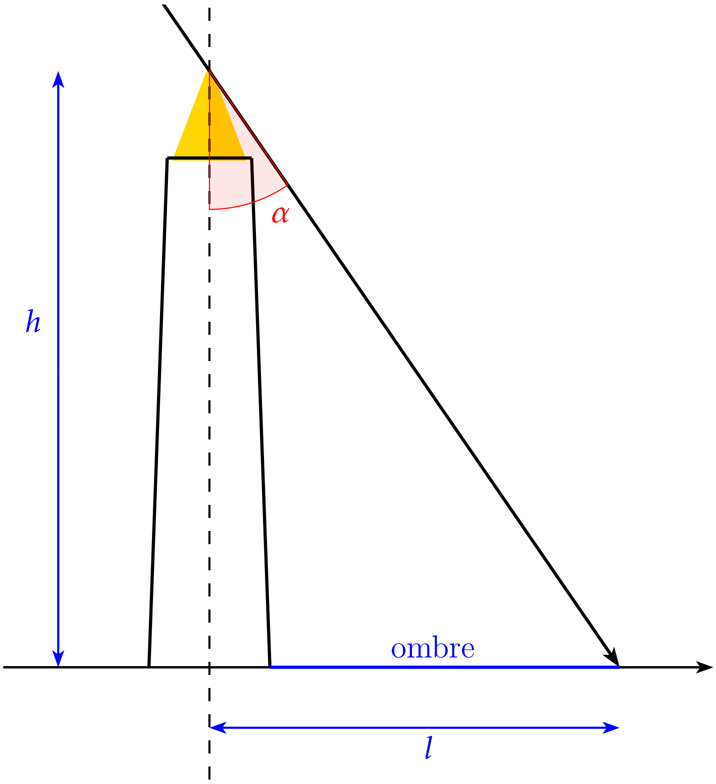
La mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène

Eratosthène (276-194 av. J.-C.) était un astronome, mathématicien et philosophie grecque. Il fut a donné une des première mesure satisfaisantes de la circonférence de la Terre. Pour ce faire, il utilisa un peu de trigonométrie.

Il avait remarqué que le jour du solstice d'été, c'est-à-dire le 21 juin, le Soleil se trouvait exactement à la verticale à midi dans la ville de Syène (actuellement Assouan) en Égypte. En effet, le 21 juin, à midi, les rayons du Soleil tombaient exactement au fond d'un profond puit. Le même jour, à Alexandrie, un peu plus au nord de Syène, les rayons du Soleil projetaient des ombres. Eratosthène eut l'idée de mesurer la longueur de cette ombre le 21 juin, afin de calculer la circonférence de la Terre.



Il mesure que la longueur de l'ombre d'une obélisque haute de cinquante coudées située à Alexandrie est de six coudées un quart.



L'angle α que fait un rayon du Soleil avec la verticale peut être calculé au moyen des formules de trigonométrie dans le triangle rectangle :

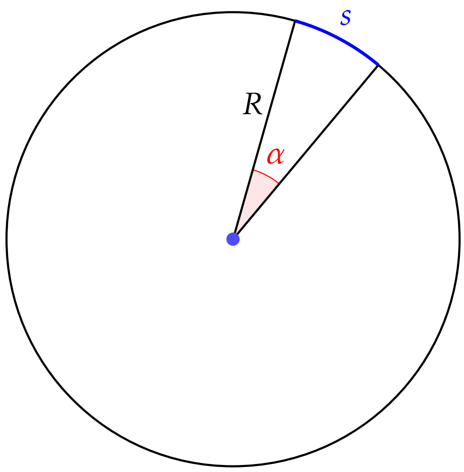
$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{l}{h}\\ &= \frac{6,25}{50}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\\ &= 7{,}125^\circ\\ &= 0{,}124\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Nous savons que la longueur s d'un arc intercepté par un angle α est donnée par :

$$s = \alpha R$$



Dans notre cas, R est le rayon de la Terre. Étant donné qu'Eratosthène a mesuré α, s'il possède la mesure de s, il peut en déduire la valeur de R.

Il avait appris qu'il fallait cinquante jours à un chameau pour faire le voyage de Syène à Alexandrie et qu'un chameau parcourt une distance de cent « stades » en une journée. Un stade mesurant $157{,}5\,\mathrm{m}$, nous pouvons déterminer le rayon de la Terre :

$$\begin{aligned} R &= \frac{s}{\alpha} \\ &= \frac{50.100 \text{ stades}}{0{,}124\,\mathrm{rad}} \\ &= \frac{5000 \text{ stades}}{0{,}124\,\mathrm{rad}} \\ &= \frac{5000.157{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}124\,\mathrm{rad}} \\ &= 6\,350\,806\,\mathrm{m} \\ &= 6351\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Des mesure plus précises, donne actuellement une valeur moyenne du rayon de la Terre égale à $6371\,\mathrm{km}$.

Nous pouvons maintenant déduire la circonférence c de la terre. Étant donné qu'un cercle de rayon R a une circonférence de $2\pi R$, nous avons :

$$\begin{aligned} c &= 2\pi R \\ &= 2.6{,}28\,\mathrm{rad}.3650\,\mathrm{km} \\ &= 39\,898\,\mathrm{km} \\ &\approx 40\,000\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

La circonférence de la Terre est actuellement estimée à $40\,030\,\mathrm{km}$. Pas mal pour un astronome du troisième siècle avant J.-C. !